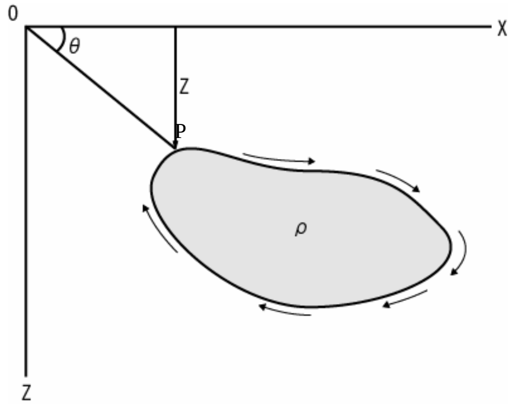
A タルワニの方法による二次元重力異常の計算

・任意の断面形状を持った二次元物体による重力異常



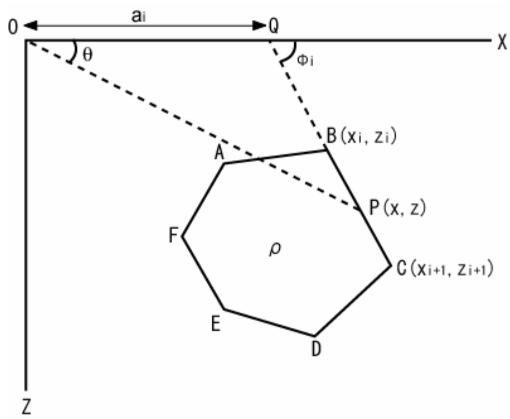
右図のように X 軸を水平方向、Z 軸を鉛直下方にとった座標系で二次元構造の物体を考える。Y 軸は紙面に垂直な方向であり、物体のパラメータは Y 軸方向には変化しないとする。

このような物体による原点 O での重力異常 g は、以下のような線積分で表される（Hubbert, 1948）。

$$g = 2G\rho\oint z d\theta \quad (1)$$

ここで、G は万有引力定数、ρは物体の密度、z は物体表面上の点 P までの深度、θは X 軸と OP の成す角である。

・断面形状が多角形で表される二次元物体による重力異常



Talwani(1959)は、上記の線積分の式を元に、断面形状が多角形で表される二次元物体による重力異常値の解析解を示した。

右図のような断面形状が多角形 ABCDEF で表される二次元物体を考える。この場合、(1)式の線積分は、多角形の各辺毎の線積分を足し合わせたものに等しい。

$$\oint z d\theta = \oint_{AB} z d\theta + \oint_{BC} z d\theta + \ldots + \oint_{EF} z d\theta + \oint_{FA} z d\theta \quad (2)$$

辺 BC での線積分を考える。辺 BC 上の任意の点 P の座標を(x, z)、X 軸と OP の成す角をθ、直線 BC と X 軸の交点を Q(a_i, 0)、X 軸と QC の成す角をϕ_i とする。z はθを使って、

$$z = x\tan\theta \quad (3)$$

と表される。同様にϕ_i を使って、

$$z = (x - a_i)\tan\phi_i \quad (4)$$

とも表される。(3)、(4)式より、

$$z = \frac{a_i \tan\theta \tan\phi_i}{\tan\phi_i - \tan\theta} \quad (5)$$

となる。BC 上の線積分を Z_i とすると、

$$Z_i = \int_B^C z d\theta = \int_B^C \frac{a_i \tan\theta \tan\phi_i}{\tan\phi_i - \tan\theta} d\theta \quad (6)$$

となる。(6)式は、各辺で成り立つので、辺の数を n とすると、重力異常値は、

$$g = 2G\rho \sum_{i=1}^{n} Z_i \quad (7)$$

と表される。(6)式の積分は解析的に解くことができ、以下のようになる。

$$Z_i = a_i \sin\phi_i \cos\phi_i \left[\theta_i - \theta_{i+1} + \tan\phi_i \log \frac{\cos\theta_i (\tan\theta_i - \tan\phi_i)}{\cos\theta_{i+1} (\tan\theta_{i+1} - \tan\phi_i)} \right]$$

ここで、

$$\theta_i = \tan^{-1} \frac{z_i}{x_i}$$

$$\theta_{i+1} = \tan^{-1} \frac{z_{i+1}}{x_{i+1}}$$

$$\phi_i = \tan^{-1} \frac{z_{i+1} - z_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$a_i = x_{i+1} + z_{i+1} \frac{x_{i+1} - x_i}{z_i - z_{i+1}}$$

である。ただし、以下の場合にはより単純な式になる。

$x_i = 0$ の場合、

$$Z_i = -a_i \sin\phi_i \cos\phi_i \left[\theta_{i+1} - \frac{\pi}{2} + \tan\phi_i \log\{\cos\theta_{i+1} (\tan\theta_{i+1} - \tan\phi_i)\} \right]$$

$x_{i+1} = 0$ の場合、

$$Z_i = a_i \sin\phi_i \cos\phi_i \left[\theta_i - \frac{\pi}{2} + \tan\phi_i \log\{\cos\theta_i (\tan\theta_i - \tan\phi_i)\} \right]$$

$z_i = z_{i+1}$ の場合、

$$Z_i = z_i (\theta_{i+1} - \theta_i)$$

$x_i = x_{i+1}$ の場合、

$$Z_i = x_i \log \frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_{i+1}}$$

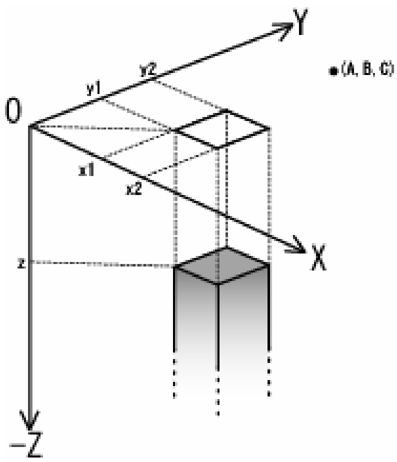
$\theta_i = \theta_{i+1}$ または $x_i = z_i = 0$ または $x_{i+1} = z_{i+1} = 0$ の場合、

$$Z_i = 0$$

タルワニの方法により、X 軸上の任意の点で重力値が計算できるので、二次元物体に直交

する測線での重力プロファイルを計算することが可能となる。

B 三次元基盤構造解析



右図のような鉛直下方に無限に長い直方体による点(A,B,C)における重力値 G は次のように計算される。

$$G=\gamma\rho\{F(X1,Y1,Z)-F(X2,Y1,Z)-F(X1,Y2,Z)+F(X2,Y2,Z)\} \quad \text{(B-1)}$$

ただし、

$$X1=A-x1,\quad X2=A-x2$$
$$Y1=B-y1,\quad Y2=B-y2$$
$$Z=|z-C|$$

$$F(x,y,z)=-\iiint\frac{zdxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$
$$=x\ln\left(\frac{y+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)+y\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)-z\tan^{-1}\left(\frac{xy}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

である。

直方体を格子状に配置し、その上面を基盤深度とすれば基盤による重力異常を上式によって計算することができる。

今、計算点と基盤を表す直方体が X 方向、Y 方向に格子状に同じように並んでいるとする。点(x_i, y_j, z)における(x_k, y_l, D_{kl})の直方体による重力値を G_{ij}^{kl} とすると、基盤による相対的な重力異常値⊿$G_{ij}(z)$は基盤深度の平均値を D_0 とおくと、

$$\Delta G_{ij}(z)=\sum_k\sum_l\left\{G_{ij}{}^{kl}(z,D_{kl})-G_{ij}{}^{kl}(z,D_0)\right\} \quad \text{(B-2)}$$

と計算される。測定値 g^*と計算値が最もよく合うような D_{kl} をイタレーション法によって求める。

測定値からその平均値を引いたものをδg*とする。D_{kl} の第１近似を

$$D_{kl}{}^{(1)}=D_0+\lambda\delta g_{ij}{}^*/2\pi\gamma\rho \quad \text{(B-3)}$$

とする。この基盤による重力値異常値を上式で計算する。

$$g_{ij}{}^{(1)}=\Delta G_{ij}(z_{ij})=\sum_k\sum_l\left\{G_{ij}{}^{kl}(z_{ij},D_{kl}{}^{(1)})-G_{ij}{}^{kl}(z_{ij},D_0)\right\} \quad \text{(B-4)}$$

$g_{ij}{}^{(1)}$からその平均値を引いたものをδ$g_{ij}{}^{(1)}$とする。δ$g_{ij}{}^{(1)}$とδg*の残差の二乗和の平均が十

分小さければその時の D_{kl} を最適解とする。もし、大きければ、第２近似として、

$$D_{ij}{}^{(2)} = D_{ij}{}^{(1)} + \lambda\left(\delta g_{ij} * - \delta g_{ij}{}^{(1)}\right) / 2\pi\gamma\rho \quad \text{(B-5)}$$

を式(B-2)に代入して、

$$g_{ij}{}^{(2)} = \Delta G_{ij}\left(z_{ij}\right) = \sum_{k}\sum_{l}\left\{G_{ij}{}^{kl}\left(z_{ij}, D_{kl}{}^{(2)}\right) - G_{ij}{}^{kl}\left(z_{ij}, D_{0}\right)\right\}$$

を計算し、以下残差二乗和の平均値が十分小さくなるまで反復計算を繰り返す。

C 二次傾向面の算出

ブーゲー異常値に最もよく合う二次傾向面を最小二乗法によって求める。

二次曲面は一般に以下のように表される。

$$z = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f \qquad \text{(B-1)}$$

ブーゲー異常値を g、ブーゲー異常値と二次曲面の残差を E とすると、

$$g = z + E = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f + E \qquad \text{(B-2)}$$

残差 E の二乗和が最小になるような係数（$a, b, \cdots, f$）を求める。

$$\sum_n E^2 = \sum_n \left\{ g - \left(ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f \right) \right\}^2 \to \min. \qquad \text{(B-3)}$$

(B-3)式を最小にするためには、各係数で微分したものを 0 とすればよい。

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial a}\sum_n E^2 = 0, \frac{\partial}{\partial b}\sum_n E^2 = 0, \frac{\partial}{\partial c}\sum_n E^2 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial d}\sum_n E^2 = 0, \frac{\partial}{\partial e}\sum_n E^2 = 0, \frac{\partial}{\partial f}\sum_n E^2 = 0 \end{gathered} \qquad \text{(B-4)}$$

(B-4)式をマトリックス表示すると、

$$\begin{pmatrix} \sum_n x^4 & \sum_n x^2y^2 & \sum_n x^3y & \sum_n x^3 & \sum_n x^2y & \sum_n x^2 \\ \sum_n x^2y^2 & \sum_n y^4 & \sum_n xy^3 & \sum_n xy^2 & \sum_n y^3 & \sum_n y^2 \\ \sum_n x^3y & \sum_n xy^3 & \sum_n x^2y^2 & \sum_n x^2y & \sum_n xy^2 & \sum_n xy \\ \sum_n x^3 & \sum_n xy^2 & \sum_n x^2y & \sum_n x^2 & \sum_n xy & \sum_n x \\ \sum_n x^2y & \sum_n y^3 & \sum_n xy^2 & \sum_n xy & \sum_n y^2 & \sum_n y \\ \sum_n x^2 & \sum_n y^2 & \sum_n xy & \sum_n x & \sum_n y & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_n zx^2 \\ \sum_n zy^2 \\ \sum_n zxy \\ \sum_n zx \\ \sum_n zy \\ \sum_n z \end{pmatrix} \qquad \text{(B-5)}$$

となる。

(B-5)式を$(a, b, c, d, e, f)^{\mathrm{T}}$について解けば、最適解が求まる。本解析では、変形コレスキー法によって(B-5)式を解いた。